Nivelación ciclo 5_2107

Los ángulos se pueden medir en grados sexagesimales y radianes. Un ángulo de ***1 radián*** es aquel cuyo arco tiene longitud igual al radio.

- 360º = 2π radianes (una vuelta completa)
- Un ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes (un cuarto de vuelta)
- 180º = π radianes (media vuelta)
- Como 180º = π rad, resulta que 1º = $\frac{\pi}{180}$ rad
- Un ángulo de 1 radian tiene $\frac{180}{\pi}$ = 57,29578 grados = 57º 17' 45"

Para transformar de una unidad a otra, usamos la regla de tres:

$\frac{180^o}{x^o} = \frac{\pi\, rad}{y}$ →→→→ ejemplo: 40º a rad $\frac{180^o}{40^o} = \frac{\pi\, rad}{y}$ → y = $\frac{40^o \pi\, rad}{180^o} = \frac{4\pi\, rad}{18} = \frac{2\pi\, rad}{9}$

Ejercicios:

Transformar el ángulo de grados a rad:

1) 15º 2) 35º 3) 80º 4) 150º 5) 200º
6) 90º 7) 60º 8) 45º 9) 30º

Transformar el ángulo de rad a grados:

1) $\frac{\pi}{5} rad$ 2) $\frac{\pi}{10} rad$ 3) $3\pi\ rad$ 4) $\frac{17\pi}{4} rad$

Aplicaciones de la medida en radianes

De la definición de la medida en radianes se deduce que la longitud de un arco circular de radio r y ángulo igual a α radianes es:

S = r · α , **S: arco circunferencia, r: radio y α : ángulo en rad**

Ya que conocemos el perímetro de una circunferencia de radio unitario ($2\pi r = 2\pi$), entonces el ángulo de una circunferencia completa, medido en radianes es 2π.

Ejemplo aplicación

1 Una correa conecta dos poleas de radios $r = 10$ cm y $R = 25$ cm. Si la grande da un giro completo, ¿qué ángulo expresado en grados habrá girado la pequeña?

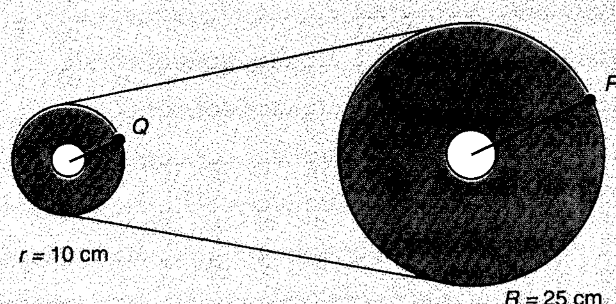


Figura 1.11.

Solución:

El punto P recorre la misma distancia que el punto Q (evidente si piensas en el movimiento de la correa). La longitud del arco recorrido por P en una vuelta es:

$$s_P = R \cdot \alpha_P = 25 \cdot 2\pi = 50\pi = 157{,}08 \text{ cm}$$

Por tanto, el ángulo girado por Q es:

$$\alpha_Q = \frac{s_Q}{r} = \frac{s_P}{r} = \frac{157{,}08}{10} = 15{,}708 \text{ radianes}$$

O sea,

$$15{,}708 \cdot \frac{180}{\pi} = 900°.$$

2 Un aspersor funciona con un mecanismo que le produce un movimiento de giro, de ida y vuelta, de 60°. Si el chorro de agua alcanza 16 m, halla el área A de la superficie de césped regada.

Solución:

Riega un sector de ángulo $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$ radianes y radio 16 m, así que:

$$A = \frac{1}{2}(16)^2 \frac{\pi}{3} = 134 \text{ m}^2$$

3 En un *sprint* los ciclistas alcanzan una velocidad de 20 m/s (72 km/h). ¿Cuál es la velocidad angular de las ruedas, es decir, cuántos grados gira por segundo? (Radio de las ruedas = 35 cm).

Solución:

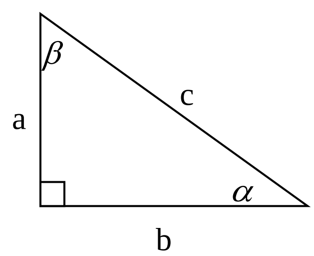
Como cada giro de la rueda hace avanzar $2\pi r = 0{,}70\pi = 2{,}20$ m, en un segundo da $\frac{20}{2{,}20} = 9{,}095$ vueltas, o sea 9,095 veces 360°, unos 3.274°. (Más de 30° en una centésima de segundo, ¡impresionante!).

Ahora tu

1) ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las cuatro y media en punto? Y a las 10:20 hrs.?
2) Halla el radio r de una rueda que gira 300 vueltas por minuto impulsada por una correa que se mueve a 45 m/s.
3) La rueda de un vehículo tiene un diámetro de 90 cm. ¿Cuántas vueltas da aproximadamente por minuto cuando viaja a 120 km/h?

Funciones trigonométricas

Utilizaremos un triángulo rectángulo para definir las funciones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (cosec).



En un triángulo rectángulo, estas funciones se definen como sigue:

sen α = $\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ tan α = $\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$ sec α = $\dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$

cos α = $\dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ cot α = $\dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$ cosec α = $\dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$

Aquí podemos darnos cuenta que basta con conocer las funciones sen α y cos α para poder calcular las otras funciones, veamos por qué:

tan α = $\dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$ cot α = $\dfrac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$ sec α = $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ cosec α = $\dfrac{1}{sen\ \alpha}$

Aplica los contenidos de matemática común y calcula los valores de los ángulos de 30º, 45º y 60º

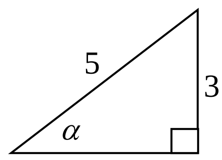
Demostrar que: $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, usa los valores de los ángulos anteriores y después demuéstralo para cualquier valor del ángulo.

Ejemplo:

1) Un ángulo agudo α tiene $sen\alpha = \frac{3}{5}$. Halla las restantes razones trigonométricas de este ángulo.

1º método: Usando triángulos

Por teorema de Pitágoras buscamos el otro cateto del triángulo, es que es 4



Ahora aplicamos las definiciones de las funciones trigonometricas y encontramos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{c.ad.}{hip} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{c.op.}{c.ad.} = \frac{3}{4} \qquad \cot\alpha = \frac{c.ad.}{c.op.} = \frac{4}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{hip}{c.ad.} = \frac{5}{4} \qquad \mathrm{cos}ec\alpha = \frac{hip}{c.op} = \frac{5}{3}$$

2º método: Usando las identidades básicas

Por la identidad $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ tenemos que:

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Luego, usando estos dos valores, del seno y coseno, calculamos todas las demás funciones:

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha.}{\cos\alpha.} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

así sucesivamente……

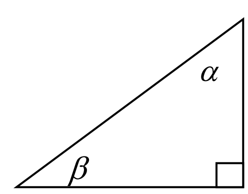
Ejercicios:

1) Si $\cos\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, encuentra las otras funciones. Entrega los valores simplificados y racionalizados.
2) Si $\cos\beta = 0{,}2$, encuentra las otras funciones.
3) Si $\tan\alpha = \frac{5}{9}$, encuentra las otras funciones.

Angulos complementarios:

En el triángulo rectángulo siguiente:

$$sen\beta = sen(90º - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \cos(90º - \alpha) = sen\alpha$$
$$\tan\beta = \tan(90º - \alpha) = \cot\alpha$$



$$\beta = 90º - \alpha$$

En estas relaciones, se cumplen con dos ángulos que son complementarios, que suman 90º, y se dicen que estas funciones son **cofunciones** una de la otra.

Ejemplos de uso de las cofunciones:

1) Calcular sen 30º.

Sen 30º = sen (90º - 30º) =cos 60º = ½

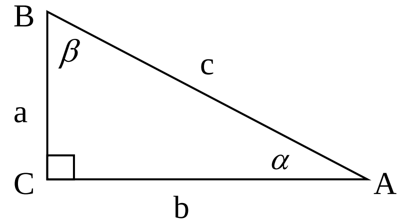
2) Expresar los siguientes valores de funciones trigonometricas como el valor de la función de un ángulo positivo menor que 45º.

a) sen 72º → sen 72º = sen (90º - 72º) = cos 18º
b) cos 46º → cos 46º = cos (90º - 46º) = sen 44º

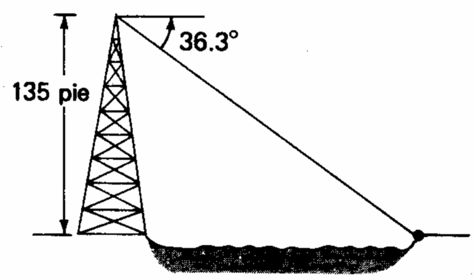
Ejercicios:

1) Expresar el valor de la función trigonométrica en términos de un ángulo no mayor que 45º:
   a) sen 60º b) cos 84º c) tan 49,8º d) sen 79,6º

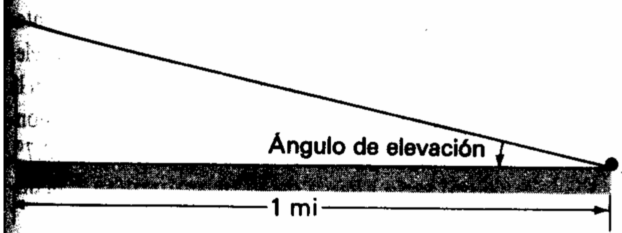
2) Resolver los triángulos rectángulos para los datos dados. Usa calculadora.
   a) α = 24º y c =16.
   b) a = 32.46 y b = 25,78
   c) α = 24º y a =16
   d) β = 71º , c = 44
   e) a = 312,7 ; c = 809
   f) b = 4.218 ; c = 6.759
   g) β = 81º12' ; a = 43,6



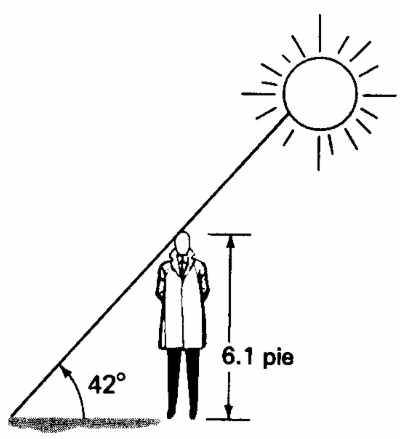
3 a torre de 135 pie de altura está situada en rilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es 36.3°. ¿Cuál es la anchura del lago?



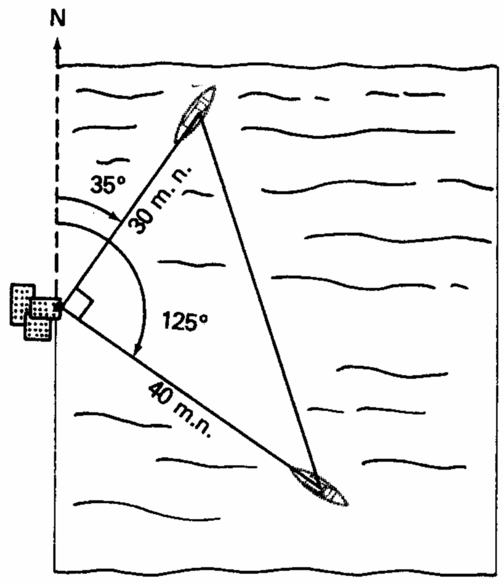
5 dificio Empire State (en Nueva York) tiene ...) pie de altura. ¿Cuál es el ángulo de elevación de su último piso desde un punto de la calle que está a 1 mi (5280 pie) desde la base del edificio?



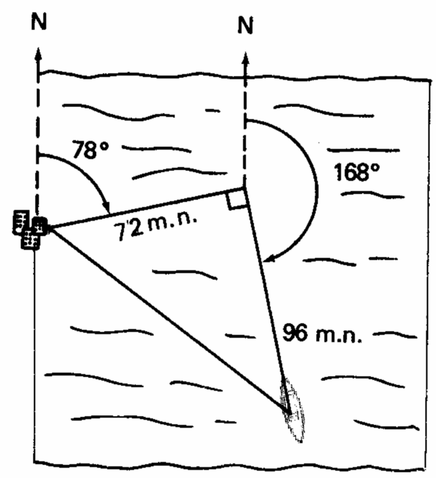
6 el ángulo de elevación del Sol es 42°, ¿cuál a longitud de la sombra proyectada sobre el suelo de una persona que mide 6.1 pie de altura?



43. 4 s embarcaciones salen de puerto al mismo mpo. La primera navega con un curso de 35° a 15 nudos, mientras que la segunda lo hace con un curso de 125° a 20 nudos. Obtenga, después de 2 h, (a) la distancia entre las naves; (b) la orientación de la primera embarcación respecto a la segunda; y (c) la orientación de la segunda respecto a la primera.



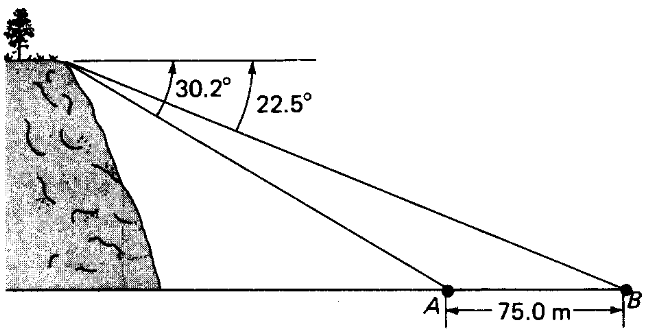
44. 7 barco sale de puerto y durante 4 horas ue un curso de 78° a 18 nudos. Después, la nave cambia al curso de 168° y lo sigue durante 6 h a 16 nudos. Después de 10 h, (a) ¿cuál es la distancia del barco al puerto?, y (b) ¿cuál es la orientación del puerto con respecto a la nave?



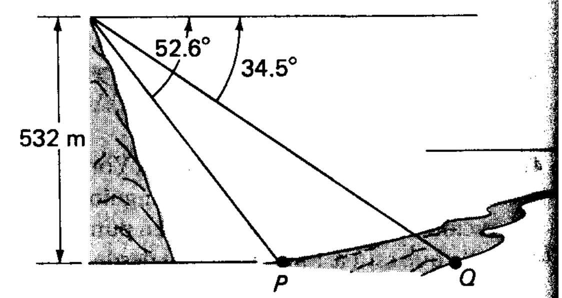
8. Desde un punto A en la orilla de un río, cuya anchura es de 50m., se ve un árbol justo enfrente. ¿Cuánto tendremos que caminar río abajo, por la orilla recta del río, hasta llegar a un punto B desde el que se vea el pino formando un ángulo de 60º con nuestra orilla?

9. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8m. del suelo y observa el edificio de enfrente. La parte superior con un ángulo de 30 grados y la parte inferior con un ángulo de depresión de 45 grados. Determine la altura del edificio señalado.

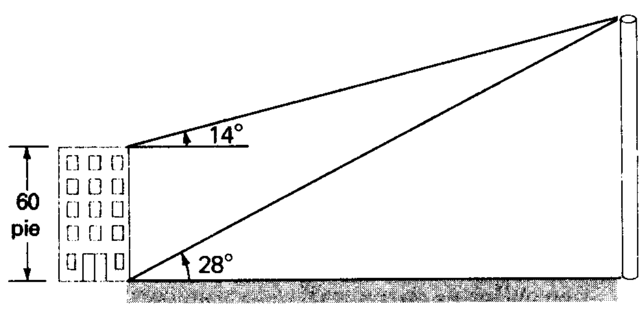
10. **Los puntos *A* y *B* están en una misma recta horizontal con el pie de una colina, y los ángulos de depresión de estos puntos desde la cima son 30.2° y 22.5°, respectivamente. Si la distancia entre *A* y *B* es 75.0 m, ¿cuál es la altura de la prominencia?**



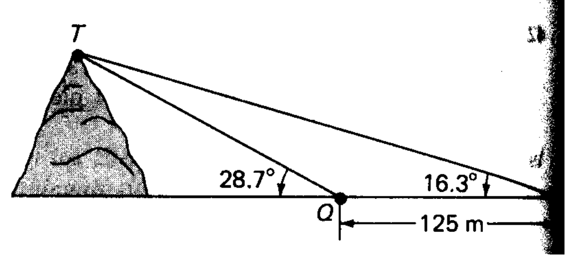
11. **Desde la cima de una montaña de 532 m de altura con respecto a un río cercano, el ángulo de depresión de un punto *P* en la ribera más cercana del río es de 52.6°, y el ángulo de depresión de un punto *Q* directamente opuesto a *P* en la otra ribera, es de 34.5°. Los puntos *P*, *Q* y el pie de la montaña están en una misma horizontal. Obtenga la distancia correspondiente a la anchura del río entre *P* y *Q*.**



12. Al observar desde el último piso de un edificio de 60 pie de altura, el ángulo de elevación del extremo superior o tope de un poste vertical, es de 14°. Desde la base del edificio, el ángulo de elevación del extremo del poste es 28°. Obtenga (a) la altura del poste y (b) la distancia del edificio al poste.

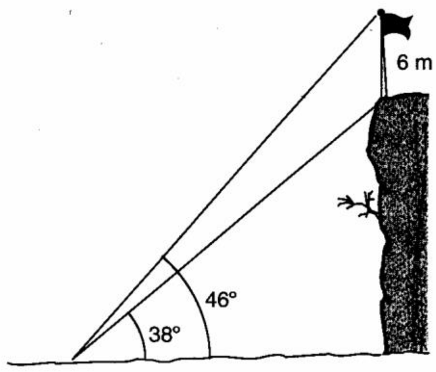


13. El punto *T* está en la cumbre de un monte. Desde un punto *P* del suelo, el ángulo de elevación de *T* es 16.3°. Desde el punto *Q* en la misma horizontal con *P* y el pie de la montaña, el ángulo de elevación de *T* es 28.7°. ¿Cuál es la altura de la prominencia si la distancia entre *P* y *Q* es 125 m?



14.

Desde un punto a ras de suelo, los ángulos de elevación que presentan la base y la punta de un mástil de 6 m de altura, colocado sobre un acantilado, son 38° y 46°. Estima la altura del acantilado. 15.



Calcula la altura de la antena que está sobre el tejado de la casa.

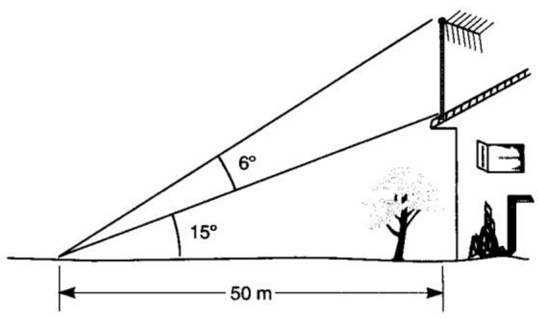


Figura 1.29.

16. Sobre un plano horizontal, un mástil está sujeto por dos cables, de modo que los tirantes quedan a lados opuestos. Los ángulos que forman estos tirantes con respecto al suelo son 27 grados y 48 grados. Si la distancia entra las cuñas es de 50 m. ¿cuánto cable se ha gastado?, ¿cuál es la altura a la cual están sujetos los cables?

17. Desde lo alto de una torre de 300 m. de altura se observa un avión con un ángulo de elevación de 15 grados y un automóvil en la carretera, en el mismo lado que el avión, con un ángulo de depresión de 30 grados. En ese mismo instante, el conductor del automóvil ve al avión bajo un ángulo de elevación de 65 grados. Si el avión, el auto y el observador se encuentran en un mismo plano vertical: calcule la distancia entre el avión y el automóvil, también calcule la altura a la que vuela el avión en ese instante.